

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2022,
Convocatoria extraordinaria

mentoor.es



Problema 1. Álgebra

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases} .$$

- Discutir el sistema en función del parámetro real a .
- Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Solución:

- Discutir el sistema en función del parámetro a .

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius. Sea A la matriz de coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|A| = a(0 - a) - 1(a - 1 - 1) + 0 = -a^2 - (a - 2) = -a^2 - a + 2.$$

$$\text{Igualamos a cero: } -a^2 - a + 2 = 0 \implies a^2 + a - 2 = 0 \implies (a + 2)(a - 1) = 0.$$

Los valores críticos son $a = 1$ y $a = -2$.

Caso 1: $a \neq 1$ y $a \neq -2$

$|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. El sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $a = 1$

$|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

La Fila 1 y la Fila 3 son idénticas. $\text{Rg}(A^*) = 2$.

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Caso 3: $a = -2$

$|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante del menor de orden 3 con las columnas 1, 2 y 4:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) + 1(1 + 2) = 3 + 3 = 6 \neq 0.$$

$\text{Rg}(A^*) = 3$. Como $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A^*)$, el sistema es **Incompatible (S.I.)**.

S.C.D. si $a \notin \{1, -2\}$; S.C.I. si $a = 1$; S.I. si $a = -2$.

- Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible.



Si $a \neq 1, -2$ (S.C.D.), usamos la Regla de Cramer. $|A| = -(a-1)(a+2)$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a+a-1}{-a^2-a+2} = \frac{-1}{-(a-1)(a+2)} = \frac{1}{(a-1)(a+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a(a-1-a) - 1(a-1-1)}{-a^2-a+2} = \frac{-a-a+2}{-(a-1)(a+2)} = \frac{-2(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{2}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a(-a) - 1(a-1) + 1(a)}{-a^2-a+2} = \frac{-a^2-a+1+a}{-a^2-a+2} = \frac{-a^2+1}{-(a-1)(a+2)} = \frac{-(a-1)(a+1)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{a+1}{a+2}$$

Si $a = 1$ (S.C.I.), el sistema es $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=1 \end{cases}$. Sea $x = \lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $y = 1 - \lambda$ y $z = 1 - \lambda$.

Si $a \notin \{1, -2\}$, la solución es $x = \frac{1}{(a-1)(a+2)}$, $y = \frac{2}{a+2}$, $z = \frac{a+1}{a+2}$.
 Si $a = 1$, la solución es $x = \lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = 1 - \lambda$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$).

Problema 2. Álgebra

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

- Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 .
- Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Solución:

- Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si A^{-1} es la inversa de A , se cumple que $(A^{-1})^{-1} = A$. Calculamos la inversa de A^{-1} : $|A^{-1}| = 1(1) - (-1)(0) = 1$. $(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Igualamos esta matriz a A :

$$\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos el sistema: $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones: $2a = 2 \implies a = 1$.
Restando la segunda de la primera: $2b = 0 \implies b = 0$.

$$\boxed{a = 1 \text{ y } b = 0.}$$

- Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 .

Para $a = 1, b = 0$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos el patrón $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Usamos las propiedades de los determinantes: $\det(A^{-50}) = (\det(A))^{-50} = \frac{1}{(\det(A))^{50}}$. $|A| = (a+b)(a-b) - 1(0) = a^2 - b^2$. Por lo tanto, $\det(A^{-50}) = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}$.

$$\boxed{\det(A^{-50}) = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}.}$$



Problema 3. Geometría

Dados los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

- Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B .
- Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r .
- Calcular la distancia del punto A a la recta s .

Solución:

- Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B .

La recta r pasa por $A(2, 0, 0)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = B - A = (-2, 1, 0)$.

Ecuación continua: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$.

La forma implícita es $\begin{cases} x - 2 = -2y \implies x + 2y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

- Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r .

El plano π contiene a s y es paralelo a r .

De s , tenemos un punto $P_s(1, 1, 0)$ y un vector $\vec{v}_s(2, 3, 1)$.

El plano π contiene a P_s y tiene como vectores directores a \vec{v}_s y \vec{v}_r .

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) - (y-1)(2) + z(8) = 0$$

$$-x + 1 - 2y + 2 + 8z = 0 \implies -x - 2y + 8z + 3 = 0.$$

$$\boxed{\text{El plano es } x + 2y - 8z - 3 = 0.}$$

- Calcular la distancia del punto A a la recta s .

Usamos la fórmula $d(A, s) = \frac{|\vec{AP}_s \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|}$.

$A(2, 0, 0)$, $P_s(1, 1, 0)$, $\vec{v}_s(2, 3, 1)$.

$\vec{AP}_s = P_s - A = (-1, 1, 0)$.

$$\vec{AP}_s \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -5)$$

$$|\vec{AP}_s \times \vec{v}_s| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

$$|\vec{v}_s| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

$$d(A, s) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{42}}{14}.$$



$$d(A, s) = \frac{3\sqrt{42}}{14} \text{ unidades.}$$



Problema 4. Geometría

Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano definido por $\pi : x + 2y + z = 3$, obtener:

- El punto de corte C entre el plano y la recta perpendicular a π que pasa por B .
- El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

Solución:

- El punto de corte C entre el plano y la recta perpendicular a π que pasa por B .

La recta r es perpendicular a π , por lo que su vector director es el normal del plano, $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1, 2, 1)$.

La recta pasa por $B(3, 2, 3)$: $r \equiv (x, y, z) = (3, 2, 3) + \lambda(1, 2, 1)$.

Para hallar la intersección C , sustituimos la recta en el plano:

$$(3 + \lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) = 3 \implies 3 + \lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda = 3 \implies 6\lambda + 10 = 3 \implies 6\lambda = -7 \implies \lambda = -7/6.$$

Sustituimos λ para hallar C :

$$x = 3 - 7/6 = 11/6, y = 2 - 14/6 = -2/6 = -1/3, z = 3 - 7/6 = 11/6.$$

El punto de corte es $C = (11/6, -1/3, 11/6)$.

- El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

$$\vec{AB} = B - A = (1, 1, 5).$$

$$\vec{AC} = C - A = (11/6 - 2, -1/3 - 1, 11/6 - (-2)) = (-1/6, -4/3, 23/6).$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ -1/6 & -4/3 & 23/6 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{23}{6} + \frac{20}{3} \right) - \vec{j} \left(\frac{23}{6} + \frac{5}{6} \right) + \vec{k} \left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \left(\frac{63}{6}, -\frac{28}{6}, -\frac{7}{6} \right) = \left(\frac{21}{2}, -\frac{14}{3}, -\frac{7}{6} \right) \end{aligned}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2 + \left(-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{441}{4} + \frac{196}{9} + \frac{49}{36}} = \frac{1}{6} \sqrt{3969 + 784 + 49} = \frac{\sqrt{4802}}{6}.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4802}}{6} = \frac{\sqrt{4802}}{12}.$$

Área = $\frac{\sqrt{4802}}{12}$ unidades cuadradas.



Problema 5. Análisis

- a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: $\int \frac{18}{x^2-5x-14} dx$.
 b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} dx$.
 c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$.

Solución:

- a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: $\int \frac{18}{x^2-5x-14} dx$.

Factorizamos el denominador: $x^2 - 5x - 14 = 0 \implies (x - 7)(x + 2)$.

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{18}{(x-7)(x+2)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+2}$$

$$18 = A(x+2) + B(x-7).$$

$$\text{Si } x = 7 \implies 18 = 9A \implies A = 2.$$

$$\text{Si } x = -2 \implies 18 = -9B \implies B = -2.$$

$$\int \left(\frac{2}{x-7} - \frac{2}{x+2} \right) dx = 2 \ln|x-7| - 2 \ln|x+2| + C = 2 \ln \left| \frac{x-7}{x+2} \right| + C.$$

$$\boxed{\int f(x) dx = 2 \ln \left| \frac{x-7}{x+2} \right| + C.}$$

- b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} dx$.

$$\begin{aligned} \left[2 \ln \left| \frac{x-7}{x+2} \right| \right]_8^t &= 2 \ln \left| \frac{t-7}{t+2} \right| - 2 \ln \left| \frac{8-7}{8+2} \right| = 2 \ln \left| \frac{t-7}{t+2} \right| - 2 \ln \left(\frac{1}{10} \right) \\ &= 2 \ln \left| \frac{t-7}{t+2} \right| + 2 \ln(10). \end{aligned}$$

$$\boxed{2 \ln \left| \frac{t-7}{t+2} \right| + 2 \ln(10).}$$

- c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$.

$$2 \ln \left| \frac{t-7}{t+2} \right| + 2 \ln(10) = \ln \left(\frac{25}{4} \right)$$

$$\ln \left(\left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 \cdot 10^2 \right) = \ln \left(\frac{25}{4} \right)$$

(Como $t > 8$, el valor absoluto es innecesario).

$$100 \frac{(t-7)^2}{(t+2)^2} = \frac{25}{4} \implies 4 \frac{(t-7)^2}{(t+2)^2} = \frac{1}{4} \implies \left(\frac{2(t-7)}{t+2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\frac{2(t-7)}{t+2} = \pm \frac{1}{2}$. Como $t > 8$, $t - 7 > 0$, así que tomamos la raíz positiva.
 $4(t-7) = t+2 \implies 4t - 28 = t+2 \implies 3t = 30 \implies t = 10$. (El valor $t = 10$ es mayor que 8).

$$\boxed{t = 10.}$$

Problema 6. Análisis

Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x . Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY . Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

- Determinar el área del rectángulo en función de x .
- Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Solución:

- Determinar el área del rectángulo en función de x .

El rectángulo tiene como vértices $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(0, f(x))$.

La base del rectángulo es x y la altura es $y = f(x) = e^{-x^2}$.

El área es $A(x) = \text{base} \cdot \text{altura} = x \cdot e^{-x^2}$.

$$A(x) = xe^{-x^2}.$$

- Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Para maximizar el área, derivamos e igualamos a cero:

$$A'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$A'(x) = 0 \implies 1 - 2x^2 = 0 \implies x^2 = 1/2 \implies x = 1/\sqrt{2}$$

(tomamos la solución positiva).

Comprobamos con la segunda derivada:

$$A''(x) = e^{-x^2}(-2x)(1 - 2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = -2xe^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

Para $x = 1/\sqrt{2}$, $A''(1/\sqrt{2}) < 0$, por lo que es un máximo.

El punto M es $(x, f(x))$:

$$x_M = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_M = f(x_M) = e^{-(1/\sqrt{2})^2} = e^{-1/2}$$

El área máxima es $A(x_M) = x_M \cdot y_M = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}e}$.

$$\text{El punto es } M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right). \text{ El área máxima es } \frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

